《定理》　対数関数はその定義域において微分可能で，

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(\log a)\,x}, \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

となる。ただし，ここで $e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ であり，$\log x$ は $\log_e x$ の略記である。

〈証明〉　$y = \log_a x$ とおくとき，$0 < x$ である。さて，

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} && \text{（微分係数の定義）}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a \dfrac{x+h}{x}}{h} && (\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y})\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\} && \ldots①
\end{aligned}$$

を得る。$\dfrac{h}{x} = t$ とおくと，$h = tx$ …② であって，x は h に関して定数であるから，$\lim_{h\to 0} t = \lim_{h\to 0}\dfrac{h}{x} = 0$ すなわち「$h \to 0$ のとき $t \to 0$」…③ となる。よって，

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\} && \text{(①)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{tx}\log_a(1+t) && \text{(③②)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} && (\frac{1}{tx} = \frac{1}{x}\frac{1}{t},\ y\log_a x = \log_a x^y) \quad \ldots④
\end{aligned}$$

が従う。ここで，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は収束することが知られており（高等学校の範囲では証明できない），この極限値を e と表す。このとき，$\log_a t$ は連続関数であるから，

$$\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log_a\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a} \qquad \ldots⑤$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} && \text{(④)}\\
&= \left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\right)\left\{\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} && (\tfrac{1}{x}\ \text{は}\ t\ \text{について定数，⑤})\\
&= \frac{1}{x}\frac{1}{\log_e a} && \text{(⑤)} \quad \ldots⑥
\end{aligned}$$

が成り立つ。

⑥において，底について $a = e$ とすれば，

$$y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{x}\frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{x}$$

となる。■

《定義》 $\displaystyle\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ をネイピア数 [*1] または自然対数の底と呼び，e と書く。

〈補注〉 e が意味を持つには，この極限が有限確定であることを証明せねばならないが，それは高等学校の範囲を逸脱する。e は $e=2.718\cdots\cdots$ たる無理数である。

★〈補注〉 三角関数の微分可能性の根拠は $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ が収束することであった。対数関数の微分可能性の根拠は $\displaystyle\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ が収束することである。

…………………………………………………

[*1] ⟶ ネイピア (John Napier)，1550–1617，スコットランド。対数の概念を発見。

《定義》 e を底とする対数を自然対数と呼び，e を省略し $\log x$ と書く。

†〈余談〉 自然対数の底を省略するのは，最もよく用いられるからである。微分が単純な形になることが一番の効用であろう。一方，常用対数もよく用いられ，これを $\log x$ と書く分野もある（高等学校数学においては，常用対数は底を省略しない）。

《定理》 $x\neq0$ のとき，$\displaystyle(\log_a|x|)'=\frac{1}{(\log a)\,x}$ ，$\displaystyle(\log|x|)'=\frac{1}{x}$ が成り立つ。

〈証明〉 $y=\log|x|$ とする。このとき，定義域は $x\neq0$ である。さて，$0<x$ のとき，$\displaystyle(\log|x|)'=(\log x)'=\frac{1}{x}$ となる。また，$x<0$ のとき，

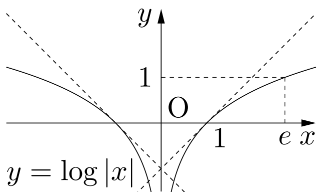
$$(\log|x|)'=(\log(-x))'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

となる。

$\displaystyle y=\log_a|x|$ とする。$\displaystyle y=\frac{\log|x|}{\log a}=\frac{1}{\log a}\log|x|$ ゆえ，

$$y'=\left(\frac{1}{\log a}\log|x|\right)'=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{(\log a)\,x}$$

となる。■



〈補注〉 $y=\log x$ の定義域は $0<x$ であるが，$y=\log|x|$ の定義域は $x\neq0$ である。これにより，「関数 $f(x)$ の対数を取って微分する」場合の適用範囲が広くなる。

〈理解〉 絶対値を含む関数の導関数に絶対値がないことを不思議に思うかもしれない。$y=\log|x|$ のグラフを描き（右上図），その接線の傾きが導関数 $\dfrac{1}{x}$ であることを考えよう。点 $(x,\,\log|x|)$ における接線の傾きについて，$0<x$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は正，$x<0$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は負である。これを踏まえると，自然な結果に見えるだろう。