No. **1**	3年 数学III中間考査 2017.MM.DD 実施（TT 分間）	組	番	名前 解答例・［解説］	点

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。結果のみを解答欄に記せ。ただし，C を積分定数として用いてよい。 $3\times 6=18$ 点

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int (\sin x+\cos x)\,dx$ (4) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}+\frac{1}{\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{2^x}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

$\boxed{1}$	(1)	$2\sqrt{x}+C$ ［$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ とし積分］
	(2)	$e^x+\log\lvert x\rvert+C$
	(3)	$-\cos x+\sin x+C$
	(4)	$-\dfrac{1}{\tan\vartheta}+\tan\vartheta+C$
	(5)	$-\dfrac{1}{2^x\log 2}+C$ ［$\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ とし積分］
	(6)	$\tan x-x+C$ ［$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用］

$5\times 5=25$ 点

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ。結果のみを解答欄に記せ。

(1) 曲線 $xy=2$ 上の点 $\mathrm{P}(1,2)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=-x^4-2x^3+2x$ の極大値とそれを与える x を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=xe^x$ の最小値とそれを与える x を求めよ。

(4) 曲線 $y=x+\cos x$ について，$0\leqq x<\pi$ を満たす変曲点の座標を求めよ。

(5) x が 0 に十分近いとき，関数 $f(x)=e^x$ を 1 次式で近似せよ。

$\boxed{2}$	(1)	$y=-2x+4$ ［合成関数でも $y=\dfrac{2}{x}$ でも可］
	(2)	$\dfrac{11}{16}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$
	(3)	$-\dfrac{1}{e}$ $(x=-1)$
	(4)	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
	(5)	$1+x$ ［近似においては昇冪の順が一般的］

$\boxed{3}$ $0\leqq x$ ならば $1-\dfrac{x^2}{2}\leqq\cos x$ となることを示せ。 10 点

〈解答〉 $0\leqq x$ とする。$f(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，

$$f'(x)=-\sin x+x$$
$$f''(x)=-\cos x+1$$

となる。ここで，$\cos x$ の性質から

$$-1\leqq-\cos x$$
$$0\leqq-\cos x+1=f''(x)$$ （両辺に 1 を加える）

を得る。したがって $f'(x)$ は単調に増加し，

$$f'(0)=-\sin 0+0=0$$

ゆえ $0\leqq f'(x)$ となる。よって $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(0)=\cos 0-(1-0)=0$$

であるから $0\leqq f(x)$ となる。以上より $0\leqq\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$ すなわち $1-\dfrac{x^2}{2}\leqq\cos x$ が従う。■

［$f'(x)$ の符号が俄かに分からなかったため，$f''(x)$ も調べた。単調増加に等号を含むが，示すべき式に等号があり十分。］

$\boxed{4}$ $0<a$ を定数とする。x の方程式 $x^a=a^x$ について，$0<x$ における解の個数を対数関数を用いて調べよ。 12 点

〈解答〉 $0<a$，$0<x$ より $x^a=a^x$ は両辺ともに正である。したがって，自然対数をとると

$$x^a=a^x\iff\log x^a=\log a^x\iff\frac{\log x}{x}=\frac{\log a}{a}$$

となる。ゆえに，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ として $y=f(x)$ と $y=f(a)$ の共有点の個数を考える。さて，

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，増減表は

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	(0)

となる。ここで，a と x の取る値の範囲は同じであるから，$f(a)$ の取る値の範囲は $f(x)$ の値域と一致する。よって $f(a)\leqq\dfrac{1}{e}$ を得る。増減表と合わせて，$y=f(x)$ と $y=f(a)$ の共有点の数は

$$\begin{cases} f(a)\leqq 0 \text{ または } f(a)=\dfrac{1}{e} \text{ のとき，1 つ} \\ 0<f(a)<\dfrac{1}{e} \text{ のとき，2 つ}\end{cases}$$

と分かる。$f(a)\leqq 0$ を解くと $0<a\leqq 1$ であり，$0<f(a)<\dfrac{1}{e}$ を解くと $1<a<e$ または $e<a$ となり，また $f(a)=\dfrac{1}{e}$ を解くと $a=e$ である。以上より，

$$\begin{cases} 0<a\leqq 1 \text{ または } a=e \text{ のとき，1 つ} \\ 1<a<e \text{ または } e<a \text{ のとき，2 つ}\end{cases}$$

を得る。 //

組	番	名前 解答例・[解説]	採点欄	3 年 数学Ⅲ中間考査 2017.MM.DD 実施（TT 分間）	No. **2**

$\boxed{5}$ 曲線 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ の概形を描け。 12 点

〈解答〉 定義域は，(分母) $\neq 0$ より $x^2-1\neq 0$ すなわち $x\neq\pm 1$ である。さて，

$$y'=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\begin{aligned}y''&=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}\\&=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}\end{aligned}$$

である。したがって，増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$+\infty$
y'	(1)	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	(1)
y''		$-$	$-$	$-$	/	$+$	0	$-$	/	$+$	$+$	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

となる。ここで，

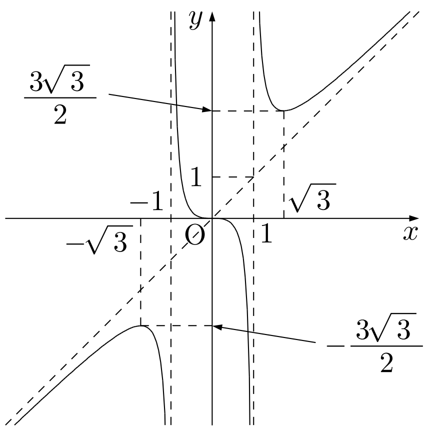
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)\\=&\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\\=&0\end{aligned}$$

である。よって，漸近線は

$y=x,\quad x=\pm 1$

となる。以上より，

<u>グラフは右のようになる。</u>



//

$\boxed{6}$ （著作物より引用のため削除） 12 点

〈解答〉 （著作物より引用のため削除）

$\boxed{7}$ （著作物より引用のため削除） 11 点

〈解答〉 （著作物より引用のため削除） //